Раздел 1. Тема 1. Занятие 2.

1°. Стереографическая проекция комплексного числа.

Рассмотрим в R^3 сферу S с центром в точке $(0;0;\frac{1}{2})$ радиусом $\frac{1}{2}$ и проведем из точки $P(0;0;1)$ луч, пересекающий сферу S в отличной от P точке $M(\xi,\eta,\psi)$ и комплексную плоскость $\psi=0$ в точке $z=x+iy$. Точка $M\in S$ называется стереографической проекцией точки z на S. При этом справедливы формулы:

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\ \psi=\frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$x=\frac{\xi}{1-\psi},\ y=\frac{\eta}{1-\psi}.$$

Если дополнить взаимно однозначное соответствие, которое существует между комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ и сферой S без точки P, поставив в соответствие этой точке идеальное комплексное число $z=\infty$, то получаем расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Следовательно, каждую точку S можно считать изображением соответствующей точки $\overline{\mathbb{C}}$. Такая интерпретация комплексных чисел называется интерпретацией Римана. Положим по определению

$$\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{0}=\infty,\ z\cdot\infty=\infty\ (z\neq 0),$$

$$z+\infty=\infty,\ \frac{z}{\infty}=0\ (z\neq\infty).$$

Величина $\arg z$ комплексного числа $z=\infty$ не определена, но модуль равен $+\infty$.

2°. Последовательности комплексных чисел.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число $z\in\mathbb{C}$, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n\geq N(\varepsilon)\Rightarrow|z_n-z|<\varepsilon\ (\lim_{n\to\infty}z_n=z).$$

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n\geq N(\varepsilon),\forall p\in\mathbb{N}\Rightarrow|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon.$$

Критерий Коши. Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists A>0: \forall n \in N \Rightarrow |z_n| \le A .$$

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется неограниченной, если

$$\forall A>0 \ \exists n \in N \Rightarrow |z_n| > A .$$

Всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ является ограниченной.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\forall A>0 \ \exists N(A): \forall n \geqslant N(A) \Rightarrow |z_n| > A \quad \left(\lim_{n\to\infty} z_n = \infty\right).$$

Последовательность $z_n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Число $z \ne \infty$ называется предельной точкой последовательности $\{z_n\}$, если существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$, сходящаяся к z.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Другими словами, любая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

Точка $z = \infty$ является предельной точкой для последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ этой последовательности такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$.

Для любой неограниченной последовательности комплексных чисел точка $z = \infty$ является предельной.

Таким образом, любая последовательность комплексных чисел имеет по крайней мере одну предельную точку (конечную или бесконечную).

Если последовательности $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$ являются сходящилимся и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = b \neq \infty$, то последовательности $\{z_n \pm z_n'\}$, $\{z_n \cdot z_n'\}$, $\{c z_n\}$, $\left\{\frac{z_n}{z_n'}\right\}$ (если $b \neq 0$) являются сходящимися и

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm z_n') = a \pm b, \quad \lim_{n\to\infty} z_n \cdot z_n' = a \cdot b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_n'} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{n\to\infty} c z_n = ca.$$

3°. Ряды комплексных чисел.

Ряд, составленный из комплексных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, называется сходящимся, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_n$ сходится к конечному пределу S. Этот предел называется суммой ряда и обозначается $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ряд называется расходящимся, если последовательность его частичных сумм не сходится к конечному пределу.

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n'$ сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c z_n$, $c \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z_n')$ сходятся и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n \pm z_n') = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n'$.

Критерий Коши сходимости ряда. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall p \in N \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ с необходимостью следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Из абсолютной сходимости ряда вытекает сходимость ряда. Если ряд сходится абсолютно, то произвольное изменение порядка членов ряда не влияет на сходимость ряда и на его сумму.

Признак Коши. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно расходится.

Признак Даламбера. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а если для любого n, начиная с некоторого $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqslant q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно расходится.

Признак Дирихле. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n$, $\xi_n \in R$, $\xi_n > 0$ достаточно, чтобы последовательность $\xi_n \to 0$ монотонно, а частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} z_k$ были ограничены.

Признак Абеля. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n$, $\xi_n \in R$ достаточно, чтобы последовательность $\{\xi_n\}$ была монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился.

Семинар 2

(2.3) Пусть $\{z_n\}$ и $\{z_n'\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n'$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n'|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n'$.

Решение: Из $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n' \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n' \\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n'|$. $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n'$ не следует.

$\exists\ z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n}$ и $z_n' = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n'$

$z_{2k} = -1 + \dfrac{i}{2k}$, $z_{2k-1} = -1 - \dfrac{i}{2k-1} \Rightarrow$

$\arg z_{2k} = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2k}$, $\arg z_{2k-1} = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2k-1}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} \arg z_{2k} = \pi \qquad \lim\limits_{k\to\infty} \arg z_{2k-1} = -\pi$

$\vee$ $\{\arg z_n\}$ не является сходящейся.

(2.4) Доказать, что для $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, $z \notin \overline{R}_-$ необходимо и достаточно существование $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \pm\pi$.

Достаточность. $\exists\exists \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \pm\pi \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\arg z_n) \neq \pm 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arg z_n)$

а) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arg z_n) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n|(\cos(\arg z_n) +$

$+ i\cdot\sin(\arg z_n)) = z$, $z \notin R$

б) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arg z_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\arg z_n) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \underbrace{\cos(\arg z_n)}_{\to 1} + i \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \underbrace{\sin(\arg z_n)}_{\to 0} = |z| > 0.$

$\Rightarrow z\in \bar{R}_+ \Rightarrow$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,\ z\notin \bar{R}_-$.

<u>Необходимость.</u> Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,\ z\notin \bar{R}_-$. Возможны два случая:

ⓐ $z\in \bar{R}_+$, т.е. $\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0$. Одновременно существуют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = z > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = 0. \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(\operatorname{Re} z_n)^2 + (\operatorname{Im} z_n)^2} = \left|\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n\right| = |z| \neq 0.$$

$$\operatorname{tg}(\arg z_n) = \frac{\operatorname{Im} z_n}{\operatorname{Re} z_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}(\arg z_n) = 0$$

Поскольку $z\in \bar{R}_+$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \pm\pi$.

ⓑ $z\in C\setminus \bar{R}$. Тогда одновременно существуют сходящиеся $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$. Далее существует $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}(\arg z_n) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \pm\pi$.

Значит, существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \pm\pi$.

(2.5) Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n$?

Нет. Рассмотрим $z_n = \dfrac{e^{i\varphi_n}}{n}$, где $\varphi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } n = 2k, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k} = \frac{\pi}{4},\ \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k-1} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\{\arg z_n\}$ не является сходящейся.

(2.7) Показать, что из сходимости $\{|z_n|\}$ не следует сходимость $\{z_n\}$.

Рассмотрим $z_n = e^{i\pi n}$. Ясно, что $|z_n| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$. Но $\lim\limits_{k\to+\infty} z_{2k} = 1$, а $\lim\limits_{k\to+\infty} z_{2k-1} = -1. \Rightarrow \{z_n\}$ не является сходящейся.

(2.8) В каких случаях сходимость $\{z_n\} \Leftrightarrow$ сходимости $\{|z_n|\}$?

Это возможно в следующих случаях:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): n\geq N(\varepsilon)\ |z_n|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 0.$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): n\geq N(\varepsilon)\ |z_n|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0.$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty.$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Rightarrow \forall A>0\ \exists N(A): n\geq N(A)\ |z_n|>A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty \Rightarrow \forall A>0\ \exists N(A): n\geq N(A)\ |z_n|>A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$

(в) начиная с некоторого номера n_0 $\operatorname{Im} z_n = 0$ и $\operatorname{Re} z_n \geq 0$, или $\operatorname{Re} z_n \leq 0$.

Существенность второго условия следует из примера $z_n = (-1)^n$. Далее смотри стр. 3.1.

(2.20) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x+iy$

Имеем $1+\frac{z}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{1/2} e^{i\varphi_n}$,

$$\text{где } \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \text{ для } n\geq n_0 \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\varphi_n} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} (\cos n\varphi_n + i\sin n\varphi_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)} =$$

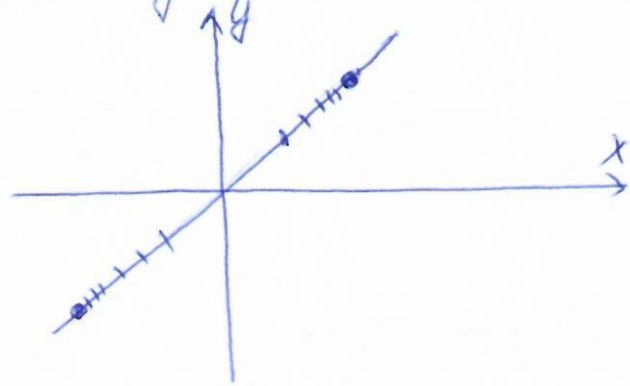
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^x.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n\cdot\frac{y}{n}\right) = \cos y$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(n\cdot\frac{y}{n}\right) = \sin y.$

(2.8) Продолжение

(7) начиная с некоторого номера n_0 $\mathrm{Re}\, z_n = 0$ и $\mathrm{Im}\, z_n \geq 0$, или $\mathrm{Im}\, z_n \leq 0$.

(9) начиная с некоторого номера n_0 числа z_n расположены на одном из лучей прямой $y = kx$



Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

(2.23) Для каких z сходится $\{z_n\}$:

1) $z_n = z^n$

Сходится для $|z|<1$, $z=1$.

2) $z_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{z^{n+1}-1}{z-1}, & z \neq 1 \\ n+1, & z=1 \end{cases}$

Последовательность сходится $\Leftrightarrow$ $\{z^{n+1}\}$ сходится $\Leftrightarrow |z|<1$.

3) $z_n = z^n \cdot n^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Имеем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$ для $a>1$. $\Rightarrow$

Если $k>0$, то $\{z_n\}$ сходится, если $|z|<1$

Если $k<0$, то $\{z_n\}$ сходится, если $|z|\leq 1$

Если $k=0$, то $\{z_n\}$ сходится, если $|z|<1$, $z=1$.

4) $z_n = \frac{z^n}{n!}$

Имеем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ для $a>0$.

Значит, $\{z_n\}$ сходится для $|z|<\infty$.

(2.26) При каких действительных φ существует предел $\lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}$?

Считаем, что $-\pi<\varphi\leq\pi \Rightarrow \varphi=\pi Q$, где $|Q|\leq 1$.

Пусть Q – рациональное число:

$Q=0 \Rightarrow \varphi=0 \Rightarrow e^{in\varphi}=1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}$.

$|Q|=1 \Rightarrow \varphi=\pi \Rightarrow e^{in\varphi}=(-1)^n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}$

$|Q|<1 \Rightarrow$ пусть $Q\in(0,1) \Rightarrow Q=\frac{p}{q}$, где $p,q\in\mathbb{N}$ и $p<q$

$\Rightarrow e^{i\frac{\pi n p}{q}} = \cos\frac{\pi n p}{q} + i\sin\frac{\pi n p}{q} \Rightarrow \left\{e^{i\frac{\pi n p}{q}}\right\}$ имеет конечное число предельных точек $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} e^{in\varphi}$

Пусть Q – иррациональное число $\Rightarrow e^{in\varphi} = e^{i\pi Q n}$. Это ограниченная последовательность. У нее всегда существует предельная точка z_0, причем $|z_0| = 1$.

Возьмем произвольную точку z_0, что $|z_0| = 1$. Пусть φ_0 – аргумент, т.е. $z_0 = e^{i\varphi_0}$. Для произвольного числа $m \in N$ найдется n_0 такое, что

$$|\pi Q n_0 - (\varphi_0 + 2\pi m)| < \frac{\pi}{m}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{\varphi_0}{\pi Q} + \frac{2m}{Q}\right) - \frac{1}{mQ} < n_0 < \left(\frac{\varphi_0}{\pi Q} + \frac{2m}{Q}\right) + \frac{1}{mQ}$$

Например, можно взять $n_0 = \left[\frac{\varphi_0}{\pi Q} + \frac{2m}{Q}\right]$, тогда

$$\lim_{n_0\to\infty} e^{in_0\varphi} = z_0.$$

Значит, у $\{e^{in\varphi}\}$ имеется бесконечное число предельных точек

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} e^{in\varphi}$.

2.29 Найти предельные точки множеств:

3) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = C \Rightarrow z = x + iy \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} = C \Rightarrow x = Cx^2 + Cy^2 \Rightarrow$

Если $C = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$

Множество предельных точек $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$

Если $C \neq 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{C} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$ – окружность с центром в $\left(\frac{1}{2C}, 0\right)$ и $R = \frac{1}{2|C|}$.

Эта же окружность и есть множество предельных точек.

4) Рассматриваете аналогично.

5) $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} > 1 \Rightarrow z = x + iy \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow$

множество предельных точек $\left\{z : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}\right\}$.

6) Рассматриваете аналогично.

2.51) Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\mu_n}$ сходится, если $0 < \varphi < 2\pi$ и $\{\mu_n\} \uparrow +\infty$.

Используем признак Дирихле:

$\left\{\frac{1}{\mu_n}\right\} \downarrow 0$

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\varphi + i \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\varphi$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos 2\varphi + \ldots + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos n\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad 0 < \frac{\varphi}{2} < \pi \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} > 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi + \ldots + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$|S_n| = \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\varphi\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\varphi\right)^2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Значит, частичные суммы ограничены. Поэтому, по признаку Дирихле ряд сходится.

(2.52) Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и

$$|\arg z_n| \le \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ или } \left|\arg z_n - \frac{\pi}{2}\right| \le \alpha < \frac{\pi}{2},$$

то ряд сходится абсолютно. Привести пример сходящегося, но не абсолютно ряда, для которого $|\arg z_n| < \frac{\pi}{2}$.

Пусть $|\arg z_n| \le \alpha < \frac{\pi}{2}$. Из сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ по критерию Коши имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): n \ge N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \in N$$

$$|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \cos\alpha \cdot \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k + i\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k\right| < \cos\alpha \cdot \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k\right)^2 + \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k\right)^2 < \cos^2\alpha \cdot \varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k\right| < \cos\alpha \cdot \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\big||z_{n+1}|\cos(\arg z_{n+1}) + \ldots + |z_{n+p}|\cos(\arg z_{n+p})\big| < \cos\alpha \cdot \varepsilon$$

При $|\arg z_n| \le \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\alpha \le \cos(\arg z_k) \le 1$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha\left(|z_{n+1}|+\ldots+|z_{n+p}|\right)<\cos\alpha\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|z_{n+1}|+\ldots+|z_{n+p}|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \text{ — сходится.}$$

Пусть $\left|\arg z_n-\frac{\pi}{2}\right|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда, в соответствующем месте имеем неравенство для $\forall\varepsilon>0$:

$$|z_{n+1}+\ldots+z_{n+p}|<\cos\alpha\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\operatorname{Re}z_k\right)^2+\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\operatorname{Im}z_k\right)^2<\cos^2\alpha\cdot\varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\operatorname{Im}z_k\right|<\cos\alpha\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left||z_{n+1}|\sin(\arg z_{n+1})+\ldots+|z_{n+p}|\sin(\arg z_{n+p})\right|<\cos\alpha\cdot\varepsilon$$

При $\left|\arg z_n-\frac{\pi}{2}\right|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\leq\sin(\arg z_n)\leq 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha>0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha\left(|z_{n+1}|+\ldots+|z_{n+p}|\right)<\cos\alpha\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|z_{n+1}|+\ldots+|z_{n+p}|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \text{ — сходится.}$$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}}{n}$

Аргумент $\varphi_n = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)$ и $|\varphi_n| < \frac{\pi}{2}$.

Имеем $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}{n} + i\,\frac{\sin(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}{n}\right] =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n}$$

$\frac{\pi}{n^2}$ сходится $\qquad (-1)^n\frac{1}{n}$ сходится

ряд из модулей расходится.

(2.12) Привести пример бесконечно большой последовательности $\{z_n\}$, для которой последовательности $\{\operatorname{Re} z_n\}$, $\{\operatorname{Im} z_n\}$ не являются бесконечно большими.

Пусть $z_n = n e^{i\frac{\pi n}{2}}$. $\operatorname{Re} z_n = n\cos\frac{\pi n}{2}$, $\operatorname{Im} z_n = n\sin\frac{\pi n}{2}$ – не являются бесконечно большими, но $|z_n| = n$, а значит $\{z_n\}$ является бесконечно большой.

(2.18) Пусть $\{z_n\}$ такова, что $\lim_{n\to\infty}(z_n - z_{n-1}) = 0$, $\lim_{n\to\infty}|z_n| = a$. Следует ли отсюда, что существует $\lim_{n\to\infty} z_n$?

Нет, не следует. Пусть $z_n = a e^{i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$. Имеем $|z_n| = a$

Далее, $z_n - z_{n-1} = a\left(\cos\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \cos\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + ai\left(\sin\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sin\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) =$

$= -2a\sin\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2n} + 2ai\cos\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2n} \Rightarrow$

$|z_n - z_{n-1}| = 2a\sin\frac{1}{2n} \to 0$ при $n\to+\infty$

Значит $\lim_{n\to\infty}(z_n - z_{n-1}) = 0$.

Однако $\{z_n\}$ не является сходящейся, так как не является сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

(2.27) Привести пример последовательности, для которой множество предельных точек

1) конечно.

Рассмотрим числа $a_1, a_2, \dots, a_p$. Тогда требуемая последовательность имеет вид

$$a_1+1, a_2+1, \dots, a_p+1, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, \dots, a_p+\frac{1}{2}, \dots, a_1+\frac{1}{n}, a_2+\frac{1}{n}, \dots, a_p+\frac{1}{n}, \dots$$

Своими предельными точками она имеет числа $a_1, a_2, \dots, a_p$.

2) счетно.

Рассмотрим последовательность

$$1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 1+\frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \dots \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

Члены данной последовательности составляют сходящиеся подпоследовательности $z_n = \frac{1}{n}$ и $z_{kn} = \frac{1}{k}+\frac{1}{k+n}$, $k, n \in N$, которые имеют соответствующие пределы $0, \frac{1}{k}, k \in N$.

Поэтому, своими предельными точками она имеет числа $0, \frac{1}{k}, k \in N$.

3) несчетно.

Рассмотрим последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

Очевидно, что все рациональные числа $r \in (0,1)$ принадлежат этой последовательности. Пусть α — любое действительное число, $0 \le \alpha \le 1$. Тогда при большом натуральном m неравенство

$$\alpha+\frac{1}{n+m}<1$$

справедливо для всех $n\in N$.

Для каждого $n\in N$ среди членов данной последовательности найдется рациональное число r_n, что

$$\alpha<r_n<\alpha+\frac{1}{n+m}.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha$, т.е. α — частичный предел. Аналогично рассматривается случай, если $0<\alpha\le 1$.

Значит, данная последовательность имеет своими предельными точками все действительные числа отрезка $[0,1]$.

2.28 Привести пример последовательности, для которой множество предельных точек есть:

1) прямая

Построим последовательность, содержащую все рациональные числа $\pm\frac{p}{q}$, $p,q\in N$:

$$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{1},-\frac{3}{1},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\ldots,$$

$$\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\frac{2}{n},-\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},-\frac{n-1}{n},\frac{n}{n-1},-\frac{n}{n-1},\ldots$$

$$\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{n}{1},-\frac{n}{1},\ldots,$$

Этот факт, что любое действительное число является частичным пределом этой последовательности, доказывается аналогично примеру 3) из 2.27,

2) окружность $|z|=R$; 3) круг $|z|\le R$;

4) $\operatorname{Re} z\geqslant 0, \operatorname{Im} z\geqslant 0$, 5) C

Эти примеры рассматриваются подобным образом.

(2.53) Пусть $\operatorname{Re} z_n \geqslant 0$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходится абсолютно. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходится, но не абсолютно.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : n \geqslant N(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$

$$|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k \right)^2 + \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k \right) < \varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n \text{ — сходится}$$

Из неравенства $(\operatorname{Re} z_{n+1})^2 + \ldots + (\operatorname{Re} z_{n+p})^2 \leqslant (\operatorname{Re} z_{n+1} + \ldots + \operatorname{Re} z_{n+p})^2$ следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} z_n)^2$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon): n \geq N_1(\varepsilon)$ и $\forall p \in N$

$$|z_{n+1}^2+\ldots+z_{n+p}^2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и $\exists N_2(\varepsilon): n \geq N_2(\varepsilon)$ и $\forall p \in N$

$$(\operatorname{Re} z_{n+1})^2+\ldots+(\operatorname{Re} z_{n+p})^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left((\operatorname{Re} z_k)^2-(\operatorname{Im} z_k)^2\right)+2i\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k \cdot \operatorname{Im} z_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\left((\operatorname{Re} z_k)^2-(\operatorname{Im} z_k)^2\right)\right)^2+4\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k \cdot \operatorname{Im} z_k\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(\operatorname{Im} z_k)^2-\sum_{k=n+1}^{n+p}(\operatorname{Re} z_k)^2\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}(\operatorname{Im} z_k)^2<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}(\operatorname{Re} z_k)^2<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

для $N(\varepsilon)=\max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Im} z_n)^2$ сходится.

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n^2|=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Re} z_n)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Im} z_n)^2$,

а каждый ряд сходится, то и требуемый ряд также сходится.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}$ для $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

Ряд сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n\varphi}}{n}$ также сходится, но не абсолютно.

(2.55) При каких $\alpha, \beta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + i \frac{1}{n^\beta} \right)$$

сходится и абсолютно сходится?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + i \frac{1}{n^\beta} \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\text{сходится по Лейбницу}} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}}_{\substack{\text{сходится при } \beta > 1 \\ \text{расходится при } 0 < \beta \le 1}}$$

Значит, сходится при $\alpha > 0, \beta > 1$

расходится при $\alpha > 0, 0 < \beta \le 1$.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + i \frac{1}{n^\beta} \right| = \sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{n^{2\beta}}}$$

при $\alpha > \beta$:

$$= \frac{1}{n^\beta} \left(1 + \frac{1}{n^{2(\alpha-\beta)}} \right)^{1/2} = \frac{1}{n^\beta} + \frac{1}{2n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} \right)$$

сходится при $\beta > 1$

при $\alpha < \beta$:

$$= \frac{1}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{n^{2(\beta-\alpha)}} \right)^{1/2} = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\alpha}} \right)$$

сходится при $\alpha > 1$

при $\alpha = \beta$ аналогично сходится для $\alpha = \beta > 1$.

Значит ряд сходится абсолютно при $\min(\alpha, \beta) > 1$.

При остальных ряд абсолютно не сходится.

(2.56) Найти все действительные значения α, при которых сходятся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e^{in} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n$

Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$ ограничены. Действительно,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\cos k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\right)^2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{1}{2}}, \text{ так как}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

При $\alpha < 0$ $\{\xi_n\} = \{n^{\alpha}\} \searrow 0$

По признаку Дирихле ряд сходится.

При $\alpha \geq 0$ ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^{\alpha}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n$

Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} i^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi n}{2}}$ ограничены. Действительно,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{\pi k}{2}}\right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2}\right)^2} \le 2\sqrt{2}, \text{ так как}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2}\right| \le 2 \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2}\right| \le 2$$

При $\alpha > 0$ $\{\xi_n\} = \left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\} \searrow 0$

По признаку Дирихле ряд сходится.

При $\alpha \le 0$ ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^\alpha} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^\alpha}$

Начиная с достаточно большого n видим, что

$$\cos\frac{\pi}{n} \sim 1,\ \sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}.$$

Поэтому сходимость рассматриваемого ряда эквивалентна сходимости ряда

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}}_{\substack{\text{сходится при } \alpha>1 \\ \text{расходится при } \alpha\le 1}} + i\pi \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}}_{\substack{\text{сходится при } \alpha>0 \\ \text{расходится при } \alpha\le 0}}$$

Исходный ряд сходится при $\alpha > 1$. При $\alpha \le 1$ он расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} i^n$

При $\alpha \ge 0$ ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости. При $\alpha = -n, n\in\mathbb{N}$ ряд сходится. Далее рассмотрим $\alpha \ne -n, n\in\mathbb{N}$. Воспользуемся при $\alpha < 0$ признаком Гаусса.

$$\left|\frac{z_n}{z_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{n+1+\alpha}\right|\cdot|i| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\frac{n}{n+1+\alpha}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha+1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$ при достаточно больших n.

Тогда при $-\alpha > 1$ ряд сходится абсолютно. Значит, при $\alpha < -1$ ряд сходится. Присоединяем очевидный случай $\alpha = -1$. Следовательно, при $\alpha \le -1$ ряд сходится.

При $-1 < \alpha < 0$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n$.

Для $\xi_n = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$ имеем:

$$\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \frac{n+1}{n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 1 \Rightarrow \{\xi_n\} \text{ убывающая}$$

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0 \quad \text{(см. Демидович №2674)}$$

Частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} i^k = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{i\frac{\pi k}{2}}$ ограничены.

Значит ряд сходится по признаку Дирихле.

Окончательно, объединяя рассмотренные случаи, ряд сходится при $\alpha < 0$.